УДК 519.22(075.8)

СИНТЕЗ И НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТА

А.А. Светлаков, Ю.Г. Свинолупов*, Е.В. Шумаков

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
*ОАО «Манотомь», г. Томск
E-mail: erbars@yandex.ru

Исследованы численные методы решения уравнений, возникающих при использовании t-распределения для интервального оценивания характеристик случайных величин. Приведены результаты решения уравнения с помощью метода Ньютона, хорд и, наиболее оптимального, дихотомического деления.

1. Введение

В настоящее время уделяется большое внимание разработке автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУТП). Одной из главных задач, возникающих в процессе функционирования подобных систем, является задача получения достаточно точных оценок неизвестных истинных характеристик управляемого объекта [1]. Во многих практических случаях при определении данных характеристик объектов для обеспечения желаемой точности целесообразно определять не точечные оценки их неизвестных значений, а некоторый интервал, который с заданной вероятностью накрывает данные значения. Обычно при решении задач по определению подобных оценок, особый интерес представляет не только точность, но и надежность оценок при ограниченном числе измерений. В математической статистике решение этих задач производится путем построения доверительного интервала I_α, который с заданной вероятностью α накрывает оцениваемое значения [1–4].

Доверительный интервал I_α устанавливает точность определения оценок рассматриваемого параметра, а характеристикой надежности получаемой оценки является доверительная вероятность α. Существующий способ построения доверительных интервалов с помощью заранее составленных и широко известных в математической статистике таблиц малопригоден для применения в АСУТП, во-первых, из-за ограниченности значений доверительной вероятности, для которых составлены данные таблицы, и во-вторых, их использование связа-

но со значительными затратами памяти компьютера для их хранения. Эти обстоятельства обуславливают необходимость использования других способов построения доверительных интервалов. Как показывает анализ имеющихся в данном случае возможностей, существуют два способа, позволяющих избежать использования таблиц. Первый из них заключается в том, что устанавливается функциональная зависимость величины доверительного интервала от нескольких параметров и, прежде всего, от объема выборки значений оцениваемой характеристики, и далее эта зависимость аппроксимируется. Другой из этих способов, предлагаемый в данной работе, основан на решении уравнения, возникающего при построении доверительного интервала с помощью того или иного известного численного метода. Решение названного уравнения в процессе построения доверительного интервала избавляет от необходимости использовать ранее составленные таблицы и позволяет строить доверительные интервалы при любом значении доверительной вероятности α и любом объеме выборки.

2. Идейные основы и возможности предлагаемого способа

Как известно [2, 3], для построения доверительных интервалов существуют приближённые и точные методы. В данном случае рассматривается точный метод. Для точного нахождения доверительных интервалов необходимо знать заранее вид закона распределения случайной величины X, тогда как для применения приближенных методов это не обязательно.

Идея точных методов построения доверительных интервалов сводится к следующему. Любой доверительный интервал находится из условия, выражающего вероятность выполнения некоторых неравенств, в которые входит интересующая нас оценка $\tilde{a}$. Закон распределения оценки $\tilde{a}$ в общем случае зависит от самих неизвестных параметров распределения случайной величины X. Однако иногда удается перейти в неравенствах от случайной оценки $\tilde{a}$ к какой-либо другой функции наблюдаемых значений $x_1,x_2,...x_n$ интересующей нас величины X, закон распределения которой не зависит от неизвестных параметров, а зависит только от числа наблюдений n и от вида закона распределения величины X. Именно таким образом обстоит дело при оценивании математических ожиданий случайных величин. Рассмотрим данные возможности более подробно.

Задача построения доверительных интервалов для оценки математического ожидания m величины X при произвольном числе опытов n решена только для случая нормально распределенной случайной величины X. Например, доказано [5, 6], что при нормальном распределении случайной величины X случайная величина T, определяемая равенством

$$T = \frac{\sqrt{n}(\tilde{m} - m)}{\sqrt{\tilde{D}}}, \qquad (1)$$

где $\tilde{m}$ и $\tilde{D}$ – оценки математического ожидания m и дисперсии σ^2 случайной величины X, вычисляемые в соответствии с равенствами

$$\text{а) } \tilde{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ и б) } \tilde{D} = \frac{1}{n-1}\sum_{i-1}^{n}(x_i - \tilde{m}),$$

подчиняется распределению Стьюдента с n–1 степенями свободы. Плотность закона распределения имеет вид:

$$S_{n-1}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \qquad (2)$$

где $S_{n-1}(t)$ – плотность распределения Стьюдента с n–1 степенями свободы; $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Для иллюстрации сущности предлагаемого метода рассмотрим его применение при построении доверительных интервалов для параметра m.

Пусть произведено n независимых опытов над случайной величиной X, распределенной по нормальному закону с неизвестным параметром m. Требуется построить доверительный интервал I_α, соответствующий доверительной вероятности α. Естественно взять этот интервал симметричным относительно $\tilde{m}$. Обозначим через ε_α половину длины интервала. Величину ε_α нужно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$P(|\tilde{m} - m| < \varepsilon_\alpha) = \alpha, \qquad (3)$$

где $P(.)$ – вероятность наступления события, указанного в скобках.

Перейдем в левой части неравенства от случайной величины ($\tilde{m}$–m) к случайной величине T, распределенной по закону Стьюдента. С этой целью умножим обе части неравенства $|\tilde{m}-m|<\varepsilon_\alpha$ на положительную величину $\sqrt{\frac{n}{\tilde{D}}}$. В результате, учитывая равенство (1), получим:

$$P\left(|T| < \varepsilon_\alpha\sqrt{\frac{n}{\tilde{D}}}\right) = \alpha.$$

Найдем такое число $t_\alpha = \varepsilon_\alpha\sqrt{\frac{n}{\tilde{D}}}$, при котором выполняется равенство

$$P(|T| < t_\alpha) = \alpha.$$

Данное равенство является, очевидно, ни чем иным, как уравнением относительно неизвестного t_α. Отсюда, воспользовавшись плотностью распределения Стьюдента, получаем

$$P(|T| < t_\alpha) = \int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} S_{n-1}(t)dt = \alpha.$$

Как видно из формулы (2), $S_{n-1}(t)$ – четная функция. Поэтому, учитывая аддитивность опреде-

ленного интеграла можно видеть, что данное уравнение эквивалентно уравнению вида

$$\int_0^{t_\alpha} S_{n-1}(t)dt - \frac{\alpha}{2} = 0.$$

В результате, учитывая равенство (2), получаем следующее уравнение:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{t_\alpha} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} dt - \frac{\alpha}{2} = 0. \qquad (4)$$

Задав вполне определённые значения доверительной вероятности α и числа степеней свободы n, получим, что неизвестным в уравнении будет являться величина t_α. Величина t_α определяет для нормального закона распределения случайной величины X число средних квадратических отклонений, которое нужно отложить вправо и влево от центра рассеивания для того, чтобы вероятность попадания оцениваемого значения m в полученном интервале была равна α. Определив t_α, мы найдём половину ширины доверительного интервала t_α и сам интервал

$$I_\alpha = \left(\tilde{m} - t_\alpha \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}};\ \tilde{m} + t_\alpha \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}} \right).$$

Как видно из (4), определение интересующего нас значения t_α сводится к решению трансцендентного уравнения, вычислить решение которого аналитически невозможно. Поэтому решить данное уравнение можно только с помощью того или иного численного метода. Как известно, в настоящее время существует целый ряд численных методов, пригодных для использования и в нашем случае. Предварительный анализ данных методов и условий их использования в нашем случае позволяет видеть, что для решения уравнения (4), наиболее целесообразно воспользоваться либо методом Ньютона, либо методом хорд, либо методом дихотомического деления. В табл. 1 приведены формулы, реализующие алгоритмы нахождения величины t_α каждым из этих методов.

В формулах, приведенных в табл. 1, $t_{\alpha,k}$ и $t_{\alpha,k+1}$ – соответственно значения t_α на k-ой и (k+1)-ой итерациях. Процесс вычисления продолжается до тех пор, пока на каком-то k-ом этапе $t_{\alpha,k}$ не станет корнем уравнения (4) или пока разность между $t_{\alpha,k+1}$ и $t_{\alpha,k}$ не станет меньше заданной погрешности ε, т. е. пока не будет выполняться неравенство.

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon.$$

3. Некоторые результаты применения методов Ньютона, хорд и дихотомии

Все рассмотренные выше методы были применены для решения ур. (4). Ниже приводятся результаты исследований данных методов, полученные при n=30 и α=0,95. Для того чтобы выяснить, как ведут себя последовательности приближений, полученные с помощью каждого из рассматриваемых методов, условие окончания процесса вычисления решений $t_{\alpha,k}$, k=1, 2, 3... задавалось неравенством

$$|t_{\alpha,k+1} - t_{\alpha,k}| \le 0{,}00001,$$

определяющем достаточно высокую точность решений.

Анализ поведения последовательностей приближений показывает, что все три итерационных процесса в асимптотике сходятся к одному и тому же значению t_α, вычисленному традиционным методом, т. е. с использованием таблиц значений t_α при α=0,95 и n=30. Однако скорости сходимости данных последовательностей существенно различаются. Так, по методу Ньютона достаточно точное приближение к корню получается на пятой итерации, а по методу хорд и по методу дихотомического деления – соответственно на десятой и на пятнадцатой итерациях.

Скорость сходимости последовательности приближений зависит для методов хорд и дихотомии

Таблица 1. *Формулы для решения уравнения (4) различными методами*

Метод	Формула
Ньютона	$t_{\alpha,k+1} = t_{\alpha,k} - \dfrac{\int_0^{t_{\alpha,k}} S_{n-1}(t)dt - \frac{\alpha}{2}}{S_{n-1}(t_{\alpha,k})}$
Дихотомического деления	$t_{\alpha,k+1} = t_{\alpha,k} - \dfrac{\left(\int_0^{t_\alpha} S_{n-1}(t)dt - \frac{\alpha}{2}\right)(t_{\alpha,k} - t_\alpha)}{\left(\int_0^{t_{\alpha,k}} S_{n-1}(t)dt - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(\int_0^{t_\alpha} S_{n-1}(t)dt - \frac{\alpha}{2}\right)}$
Хорд	$t_{\alpha,k+1} = \dfrac{(t_{\alpha,k} - t_\alpha)}{2}$, при $\left(\int_0^{t_{\alpha,k}} S_{n-1}(t)dt - \frac{\alpha}{2}\right)\left(\int_0^{t_\alpha} S_{n-1}(t)dt - \frac{\alpha}{2}\right) \le 0$

от величины интервала, содержащего корень, а для метода Ньютона – от начального приближения t_α. На рис. 1 и 2 приведены реализации методов дихотомии и хорд, отличающиеся друг от друга длиной начального интервала.

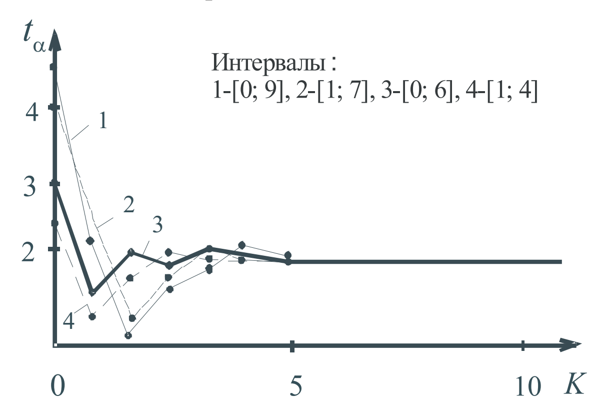


Рис. 1. *Поведение последовательных приближений по методу дихотомии при различных интервалах*

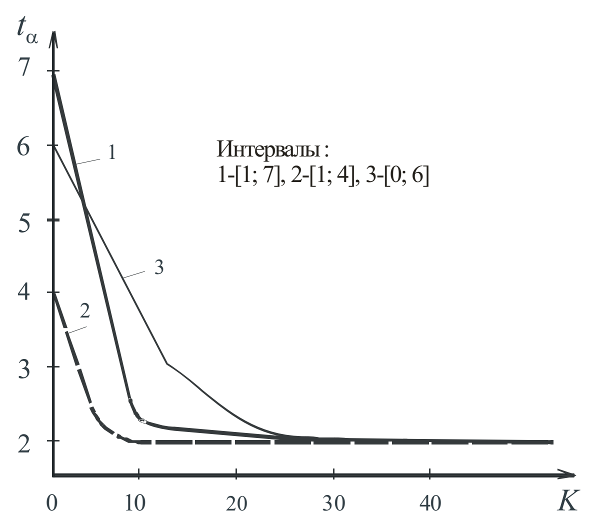


Рис. 2. *Поведение последовательных приближений по методу хорд при различных интервалах*

Как и следовало ожидать, чем меньше длина начального интервала, включающего в себя корень ур. (4), тем быстрее находится приближенное решение заданной точности.

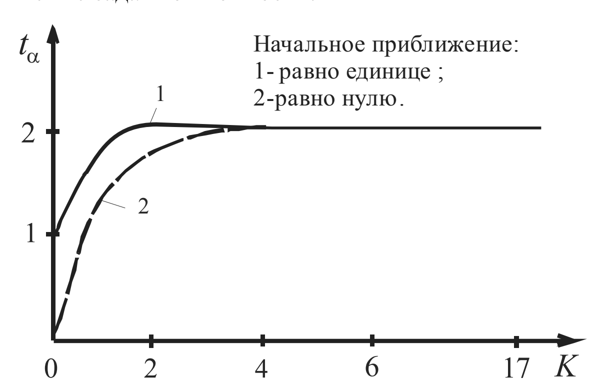


Рис. 3. *Поведение последовательных приближений по методу Ньютона*

На рис. 3 изображено поведение последовательности приближений по методу Ньютона для $t_{\alpha,0}$=0 и $t_{\alpha,0}$=1. Видно, что чем ближе начальное приближение $t_{\alpha,0}$ к истинному значению t_α, тем меньшее число итераций требуется для отыскания корня уравнения (4).

Заданная нами достаточно высокая точность ε=0,00001 позволяет видеть, что, начиная с пятой итерации для метода Ньютона и с семнадцатой для метода хорд, наблюдаются колебания в окрестности корня. Амплитуда разброса для каждого из этих двух методов различная: для метода Ньютона – $4{,}6\cdot10^{-3}$, для метода хорд – $1{,}8\cdot10^{-3}$. Причина разброса в том, что при вычислениях на ЭВМ неизбежно существуют ошибки округления. Теоретически последовательности приближений по методу Ньютона и по методу хорд должны сходиться к истинному значению корня. Для устранения данных колебаний необходимо, очевидно, проводить усреднения, и делать это тогда, когда приближенные решения уравнения оказываются в окрестности корня решаемого уравнения. Без проведения данных усреднений или принятия, каких либо иных мер, направленных на устранение колебаний, методы Ньютона и хорд не дают точного решения ур. (4).

Применение усреднений в методах Ньютона и хорд позволяют получить решение, но при этом увеличиваются сложность методов и увеличиваются затраты времени, тогда как использование метода дихотомического деления позволяет получить решение ур. (4) при наименьших затратах времени. На основе этого можно сделать вывод, что наиболее эффективным для решения ур. (4) является метод дихотомического деления.

4. Выводы

Предложенные алгоритмы решения уравнений, возникающих при использовании распределения Стьюдента, для нахождения доверительных интервалов, позволяют отказаться от использования таблиц. При этом появляется возможность нахождения доверительного интервала для любого заданного значения доверительной вероятности.

Рассмотренные алгоритмы решения, являются относительно простыми и не требуют больших вычислительных затрат, что дает возможность получать доверительные интервалы для оценок параметров в режиме реального времени. Лучшие результаты показал алгоритм, основанный на методе дихотомического деления. Его использование позволяет производить нахождение доверительных интервалов при наименьших затратах времени и ресурсов компьютера.

Рассмотренные алгоритмы могут использоваться в составе специализированного программного обеспечения прецизионных и высоконадежных систем автоматического контроля и управления различными технологическими процессами и объектами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мирский Г.Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. Изд. 2-е. – М.: Энергия, 1972. – 456 с.
2. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
3. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука, 1965. – 512 с.
4. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. Изд. 3-е. – М.: Наука, 1983. – 416 с.
5. Романовский В.И. Основные задачи теории ошибок. – М.-Л.: ОГАЗ ГИТ-ТЛ, 1947. – 116 с.
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – 8-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2002. – 575 с.

УДК 681.5.015